ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 1º semestre EN 2ª parte do exame 18. 01. 19

1hora. (10 valores)

Tópicos de solução

1. Seja a variável aleatória X e a respetiva função de densidade dada por $f_X(x)=\frac{3}{8}x^2$, $0<x<2$.

a) Calcule $P(1<X<2)$, $\text{var}(X)$ e obtenha também a função de distribuição de X.

$$P(1<X<2)=\int_1^2\frac{3}{8}x^2dx=\left[\frac{x^3}{8}\right]_1^2=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)dx=\int_0^2 x\frac{3}{8}x^2dx=\left[\frac{3x^4}{32}\right]_0^2=\frac{48}{32}=1.5$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,f(x)dx=\int_0^2 x^2\frac{3}{8}x^2dx=\left[\frac{3x^5}{40}\right]_0^2=\frac{96}{40}=2.4$$

$$\text{var}(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=2.4-1.5^2=0.15$$

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^3}{8} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

já que, para $0\le x<2$, se tem $P(X\le x)=\int_0^x\frac{3}{8}t^2dt=\left[\frac{t^3}{8}\right]_0^x=\frac{x^3}{8}$

b) Determine a função distribuição da variável aleatória $Y=1+2X$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1+2X\le y)=P\left(X\le\left(\frac{y-1}{2}\right)\right)=F_X\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}0 & y<1\\ \frac{\left(\frac{y-1}{2}\right)^3}{8} & 1\le y<5\\ 1 & x\ge 5\end{cases}=\begin{cases}0 & y<1\\ \frac{(y-1)^3}{64} & 1\le y<5\\ 1 & x\ge 5\end{cases}$$

2. Seja a variável aleatória X e a respetiva função de distribuição dada por:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{2}+\frac{x}{4} & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

a. Classifique, justificando, a variável aleatória X.

A função $F_X(x)$ é obviamente contínua em cada um dos 3 troços sendo pois de analisar apenas os pontos $x=1$ e $x=2$.
Como $\lim_{x\to 1^-} F_X(x)=0$ e $F_X(1)=1/2$ o ponto $x=1$ é ponto de descontinuidade e portanto a v.a será mista já que a função de distribuição é estritamente crescente para $1\le x<2$ (em alternativa pode verificar-se que $P(X=1)+P(X=2)<1$)

b. Calcule $P(X>3/2 \mid X>1)$

$$P(X>3/2 \mid X>1)=\frac{P(X>3/2)}{P(X>1)}=\frac{1-F_X(3/2)}{1-F_X(1)}=\frac{1-1/2-3/8}{1-1/2-1/4}=\frac{1/8}{1/4}=0.5$$

3. Sejam (X,Y) as variáveis aleatórias que representam o número de telemóveis vendidos e o número de computadores vendidos num mês respetivamente. A função probabilidade conjunta de X e Y é dada por:

$y \setminus x$	0	1	2
0	0.20	0.22	0.05
1	0.03	0.06	0.23
2	0.07	0.02	0.12

a) Qual a probabilidade de num mês se vender um número de telemóveis igual ao número de computadores?
$P(X=Y)=f(0,0)+f(1,1)+f(2,2)=0.20+0.06+0.12=0.38$

b) Qual a média de computadores vendidos num mês em que se vendem dois telemóveis?

$$f_{Y|X=2}(y)=\frac{f(2,y)}{f_X(2)}=\frac{f(2,y)}{0.05+0.23+0.12}=\frac{f(2,y)}{0.4}=\begin{cases}5/40 & y=0\\ 23/40 & y=1\\ 12/40 & y=2\end{cases}$$

$$E(Y \mid X=2)=\sum_{y=0}^{2} y\, f_{Y|X=2}(y)=0\times\frac{5}{40}+1\times\frac{23}{40}+2\times\frac{12}{40}=\frac{47}{40}=1.175$$

c) Calcule o coeficiente de correlação de X e Y.

$$E(X)=0\times0.3+1\times0.3+2\times0.4=1.1$$
$$E(Y)=0\times0.47+1\times0.32+2\times0.21=0.74$$
$$E(X^2)=0^2\times0.3+1^2\times0.3+2^2\times0.4=1.9$$
$$E(Y^2)=0^2\times0.47+1^2\times0.32+2^2\times0.21=1.16$$
$$E(XY)=1\times1\times0.06+1\times2\times0.02+2\times1\times0.23+2\times2\times0.12=1.04$$
$$\operatorname{var}(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=1.9-1.1^2=0.69$$
$$\operatorname{var}(Y)=E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2=1.16-0.74^2=0.6124$$
$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1.04-1.1\times0.74=0.226$$
$$\rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\times\operatorname{var}(Y)}}=\frac{0.226}{\sqrt{0.69\times0.6124}}=0.3477$$

4. Prove, utilizando apenas a definição de probabilidade condicionada, o facto de que, quaisquer que sejam os acontecimentos A e B, se ter $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ e os 3 axiomas de Kolmogorov que, para $P(C)>0$, se tem $P\left(A\cup B\,|\,C\right)=P\left(A\,|\,C\right)+P\left(B\,|\,C\right)-P\left(A\cap B\,|\,C\right)$.

$$P\left(A\cup B\,|\,C\right)=\frac{P\left(\left(A\cup B\right)\cap C\right)}{P(C)} \qquad \text{definição de prob. cond.}$$

$$=\frac{P\left(\left(A\cap C\right)\cup\left(B\cap C\right)\right)}{P(C)} \qquad \text{distributividade}$$

$$=\frac{P\left(A\cap C\right)+P\left(B\cap C\right)-P\left(A\cap C\cap B\cap C\right)}{P(C)} \qquad \text{probabilidade da união}$$

$$=\frac{P\left(A\cap C\right)}{P(C)}+\frac{P\left(B\cap C\right)}{P(C)}-\frac{P\left(\left(A\cap B\right)\cap C\right)}{P(C)} \qquad \text{re-arranjo dos termos}$$

$$=P\left(A\,|\,C\right)+P\left(B\,|\,C\right)-P\left(A\cap B\,|\,C\right) \qquad \text{definição de prob. cond.}$$

5. Num determinado distrito sabe-se que 80% das pessoas tem idade entre os 18 e os 60 anos, 10% tem menos de 18 anos e os restantes têm mais de 60 anos. Sabe-se que nenhuma das pessoas com menos de 18 anos tem um trabalho fixo, e das pessoas com mais de 60 anos apenas 15% tem trabalho fixo. Sabendo que, escolhida uma pessoa ao acaso a probabilidade de ter trabalho fixo é de 60% calcule a probabilidade de se selecionar uma pessoa que tenha entre 18 e 60 anos e tenha um trabalho fixo.

A_1 A pessoa tem entre menos de 18 anos $\qquad P(A_1)=0.1$

A_2 A pessoa tem entre 18 e 60 anos $\qquad P(A_2)=0.8$

A_3 A pessoa tem mais de 60 anos $\qquad P(A_3)=0.1$

B A pessoa tem um trabalho fixo

Sabe-se que $P(B\,|\,A_1)=0$, $P(B\,|\,A_3)=0.15$, $P(B)=0.6$.

Pede-se $P(B\cap A_2)$

Sendo $\{A_1,A_2,A_3\}$ uma partição do espaço de resultados, $P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)$

Ora

$P(B)=0.6$, $P(B\cap A_1)=P\left(B\,|\,A_1\right)\times P(A_1)=0\times 0.1=0$ e

$P(B\cap A_3)=P\left(B\,|\,A_3\right)\times P(A_3)=0.15\times 0.1=0.015$

logo $0.6=0+P(B\cap A_2)+0.015 \Leftrightarrow P(B\cap A_2)=0.6-0.015=0.585$